

Capítulo 1

La ciencia desde siempre ha sido imprescindible en la vida y todo arroja a que conforme el tiempo avanza la ciencia avanza con él, eso lo sabemos casi todos; pero la mayoría sabemos que es en las matemáticas donde radica el poder del porqué de las cosas y siendo aún más particulares, en el presente trabajo se hace especial énfasis en el análisis de *Solitones*, de los cuales su estudio se ha vuelto imprescindible en matemáticas en consecuencia para la ciencia y por tanto en la vida pues son de gran relevancia en el entendimiento del mundo físico y las aplicaciones tecnológicas. El descubrimiento que años después cobraría importancia impactante en el quehacer científico comienza como mucho de los grandes descubrimientos que conocemos hoy en día, de la casualidad; pues fue en el año de 1834, en el canal Union en Hermiston (Escocia) se encontraba el ingeniero escocés John Scott Rusell (1808-1882) y de manera inesperada observó un fenómeno que posteriormente describiría en su obra report on waves como wave of translation (onda de translación u onda solitaria). Tal fue la emoción de Scott Rusell al observar aquel fenómeno que utilizó el jardín de su casa y se dedicó a perfeccionar distintas técnicas, todas con la finalidad de reproducir ondas solitarias obteniendo como consecuencia resultados empíricos los cuales constataban que la amplitud de la onda era igual al del agua desplazada, y fue capaz de obtener una fórmula que expresaba la velocidad de la onda en términos de la amplitud y profundidad del canal. A las ondas solitarias se les consideraba una rareza científica de poca importancia teórica y práctica lo cual cambió drásticamente cuando en los años sesenta comenzó la explosión de los ordenadores, pues fue en 1960 que los científicos comenzaron a utilizar computadoras digitales para estudiar la propagación de ondas no lineales y fue hasta entonces que las primeras ideas

de Rusell tomaban sentido. J. Rusell vio la onda solitaria como una entidad dinámica autosuficiente que mostraba propiedades de partícula y hasta nuestros días esto es usado para formular comportamientos dinámicos complejos de sistemas de ondas en toda la ciencia, como lo es la hidrodinámica, óptica no lineal, plasmas, tornados, vibración de cuerdas, ondas de presión, ondas de agua y electromagnéticas entre otros. Se llevaron a cabo experimentos donde se pretendía observar si se podía destruir una onda solitaria, sin embargo en lugar de desaparecer, de las olas rotas por el choque aparecieron otras intactas que continuaron avanzando sin cambio alguno, parecía como si cada una de las dos olas únicas conservara su identidad primitiva y fuera capaz de elevarse de nuevo conservando su antigua forma y velocidad. A éstas ondas las llamaron solitrónicas, pero como el término ya se utilizaba en patentes industriales, le dieron el nombre de solitones; éste término fue elegido para estar en concordancia con el nombre de partículas elementales, tales como electrón, protón, fotón. Un solitón de inicio es una onda especial, que después de una colisión con otra onda del mismo tipo, reaparece en su forma intacta. El equilibrio entre la no linealidad y la dispersión lineal genera solitones. Es así que de manera sencilla e introductoria entenderemos por solitón a una onda solitaria en forma de un pulso que es capaz de propagarse sin deformación alguna, además de ser capaz de conservar su estructura. Las ecuaciones de evolución no lineales son ampliamente estudiadas por sus papeles importantes en la mayoría de las ramas de la ciencia. En 1870 Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) y John William Strutt Rayleigh (1842-1919) derivaron expresiones matemáticas para la forma y velocidad de tales ondas, y es en 1871 que J. Boussinesq publica la primera teoría matemática que apoyaría la observación experimental de J. Rusell al derivar una ecuación en derivadas parciales no lineal que hoy en día lleva su nombre. Para el año 1895 se obtuvo una ecuación en derivadas parciales que describiría a la onda solitaria y esto es gracias al trabajo de Kiederick Johannes Korteweg (1848-1941) y Gustav de Vries (1866-1934) tal ecuación estaba basada en que la suposición de la profundidad del agua es pequeña en comparación con la anchura de las ondas y relaciona la amplitud de la onda y sus cambios en el espacio con el cambio de la amplitud con el tiempo; la teoría de Kiederick y Gustav de Vries es aceptada en muchas ramas del saber científico, desde la física de partículas hasta la biología molecular.

En 1926 Oskar Benjamin Klein (1894-1977) y Walter Gordon (1893-1939) proponen una ecuación (actualmente conocida como ecuación de Klein - Gor-

don o KG) que describe a los electrones relativistas; ésta ecuación se ha estudiado con mayor frecuencia para describir la dinámica de partículas en la teoría cuántica de campos, átomos hadrónicos, la interrupción de corriente de superfluido, agua superficial y la radiación de Hawking de un agujero negro. Tal ecuación fue propuesta originalmente por Erwin Schrödinger (1887-1961) como ecuación para la función de onda de una partícula cuántica. Sin embargo, como la ecuación no admitía una interpretación probabilista adecuada a otros problemas, Schrödinger consideró pasar a una versión no relativista de la ecuación que actualmente se conoce por ecuación de Schrödinger.

Por otro lado la ecuación Biharmonica es utilizada en el área de mecánica del continuo, teoría de la elasticidad lineal y la solución de flujo de Stokes, surge también de minimizar la energía de flexión de una placa delgada de un material flexible sujeto a las mismas condiciones de borde y a ninguna fuerza externa. Por su parte la ecuación del telégrafo es plateada en el estudio de la propagación de las señales eléctricas en el cable de una línea de transmisión, así como en la propagación de ondas de presión en el estudio del flujo sanguíneo pulsátil en las arterias y en el movimiento aleatorio unidimensional de errores a lo largo de un seto. La Ecuación de Benjamín- Bona- Mahony (BBM) es introducida como una mejora a la ecuación KdV para modelar ondas largas de pequeña amplitud. Y finalmente Camassa and Holm descubrieron en 1993 una ecuación en derivadas parciales conocida como ecuación de Camassa-Holm (CH) la cual modela la propagación de ondas (singulares) con picos, que llamaron solitones picados (peaked solitons), que actualmente se les conoce como picones (peakons). Dicha ecuación es integrable, se puede escribir matemáticamente su solución general, demostrándose que cualquier onda acaba descomponiéndose en una serie de picones.

Los solitones o soluciones de tipo solitónicas, son ejemplos de condiciones iniciales que no cambian su forma durante su evolución, únicamente se trasladan, sufren un desfaseamiento o viajan a través del medio, dentro de ésta clase de soluciones merecen especial atención y son en cierto sentido el objeto de estudio de éste trabajo, las soluciones de tipo onda viajera.

En el presente trabajo se hace especial énfasis en solamente dos ecuaciones, en la primera de Heimbürg-Jackson para la cual sabemos que el cerebro es sin duda alguna imprescindible en la vida cotidiana y por ende, constituye uno de los grandes retos de la ciencia moderna, particularmente a base de

modelos matemáticos que ayuden a la comprensión de la funcionalidad de la mente, entendiendo la mente misma los modelos matemáticos. La aproximación matemática al estudio del cerebro contempla el análisis en las células nerviosas o neuronas entre otros aspectos.

La célula nerviosa se denomina neurona y se compone de tres partes.

- Cuerpo celular (*SOMA*): Contiene al núcleo de la célula y es poseedor del material genético de la neurona.
- Dendritas: Constituyen uno de los canales físicos principales para los cuales la neurona puede recibir señales provenientes de otras células.
- Axón: Son fibras que transmiten los impulsos nerviosos o potenciales de acción desde el cuerpo celular *SOMA* hacia la siguiente célula.

Es en el axón que se tiene la relación con la mecánica y propiedades termodinámicas mediante el análisis cualitativo de la ecuación de movimiento a lo largo del mismo; que bien podemos interpretar como la propagación de señales eléctricas a lo largo de una fibra nerviosa.

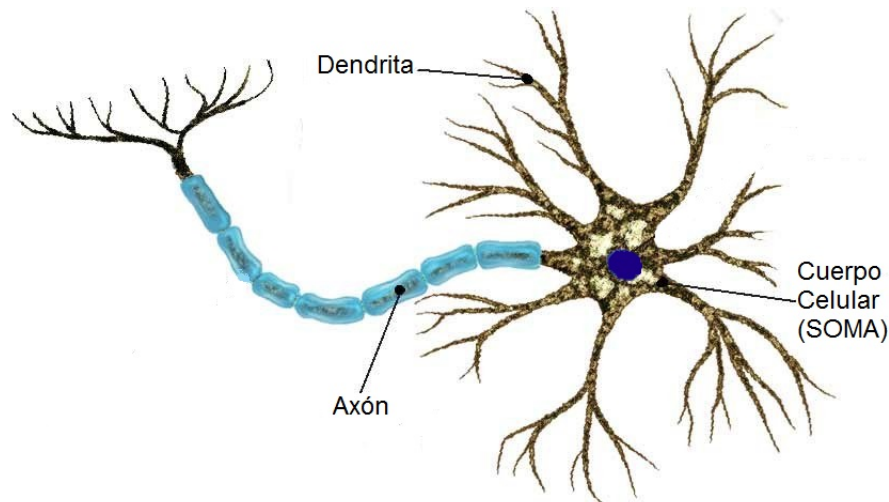


Figura 1.1: Neurona

En 1989 fue propuesto un trabajo por Peyrard y Bishop, además de que dicho trabajo ha tenido gran éxito hasta la fecha, pues se aplica a fenómenos térmicos, en particular a la desnaturalización del ácido desoxirribonucleico, mejor conocido por sus siglas ADN. Es bien sabido que el ADN contiene la información genética que permite reproducirse a los organismos y transmite a la descendencia para continuar el proceso; su estructura consta de dos hebras, las cuales están unidas por moléculas llamadas bases al ser éstas últimas quienes constituyen los escalones que unen a las dos hebras y poseen la información genética. El fenómeno de interés es el de desnaturalización térmica; cuando la temperatura sube por encima de un cierto valor, situado en un rango de $60^{\circ}\text{C} - 80^{\circ}\text{C}$, la doble cadena se rompe espontáneamente y sus dos hebras constitutivas quedan libres y pueden separarse por completo como se muestra en la Figura [1.2]

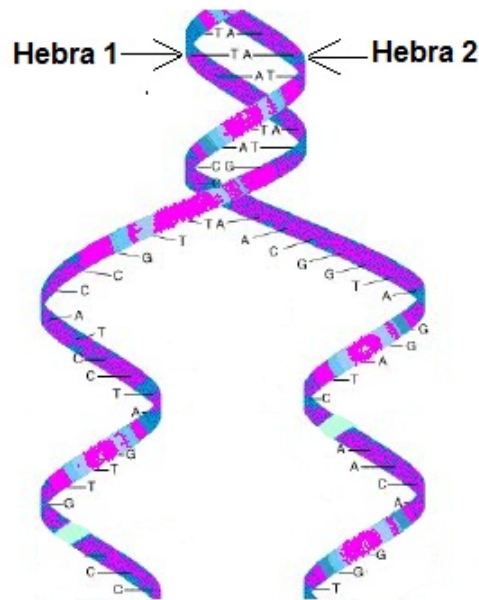


Figura 1.2: Desnaturalización de ADN

Es así que en el presente trabajo se hace un análisis en la ecuación Peyrard y Bishop.

Los solitones o soluciones de tipo solitónicas, son ejemplos de condiciones iniciales que no cambian su forma durante su evolución, únicamente se trasladan, sufren un desfaseamiento o viajan a través del medio, dentro de ésta clase de soluciones merecen especial atención y son en cierto sentido el objeto de estudio de éste trabajo, las soluciones de tipo onda viajera.

Capítulo 2

Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

2.1. Tipos de ecuaciones diferenciales

Aquella ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, es conocida como *Ecuación Diferencial*. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en diversos tipos de acuerdo a diferentes criterios, por ejemplo:

1. Si la ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente, es llamada *Ecuación Diferencial Ordinaria* (EDO) y simbólicamente la representamos por:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

donde $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

2. Cuando la ecuación involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes, recibe el nombre de

Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDP) y simbólicamente la representamos por:

$$f\left(x_1, \dots, x_n, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1, \dots, \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \quad (2.2)$$

donde x_i son las variables independientes, para todo $i=1,2,\dots,n$; $u = u(x_1, \dots, x_n)$ y f una función que toma valores reales. En la ecuación (2.2) $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ con $m, n \in \mathbb{N}$.

El *Orden* de una ecuación diferencial, es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Las ecuaciones diferenciales también adquieren clasificación por su linealidad, así por ejemplo:

- Una EDO (2.1) es lineal si $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal de las variables $x_1, x', \dots, x^{(n)}$. Así la *Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal* de orden n es:

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = g(t) \quad (2.3)$$

- Una EDO (2.1) es no lineal si no es de la forma (2.3)

Cuando hay dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente, recurrimos a un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales* el cual se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

siendo $f_i: I \times \Omega \subset \mathbb{R}^{(1+n)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $i = \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, es un campo vectorial dependiente del parámetro t en Ω . Así como las ecuaciones se clasifican en lineales y no lineales lo mismo sucede con los sistemas de ecuaciones diferenciales.

2.1.1. Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

Consideremos la ecuación (2.2). Aquella función ϕ definida en un intervalo I , que posee al menos n derivadas y para las cuales

$$f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0 \quad (2.4)$$

para todo $t \in I$, la llamaremos *Solución* de una Ecuación Diferencial Ordinaria de n -ésimo orden. Tenemos entonces que ϕ satisface la relación con una identidad de funciones en todo el intervalo I .

Supongamos que en la EDO (2.2) la derivada de orden n se puede despejar de una función de las restantes, es decir, la ecuación se puede escribir de la forma:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.5)$$

Entonces ésta ecuación es equivalente al sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ x''' \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = F(t, x)$$

en el sentido de que $x = \Phi(t)$ es solución de (2.5) si y sólo si

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \\ \vdots \\ \phi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

es solución del sistema $\dot{x} = F(t, x)$.

Ahora bien, consideremos el sistema

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{2.6}$$

si el campo vectorial $F : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^{(1+n)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ no depende de t explícitamente, entonces (2.6) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\dot{x} = F(x) \tag{2.7}$$

el sistema (2.7) recibe el nombre de *Sistema Autónomo*. En éste caso $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial fijo en Ω .

La siguiente proposición es tal vez la diferencia más remarcable entre sistemas autónomos.

Proposición 2.1. *Un sistema autónomo es invariante bajo traslaciones de la variable independiente i.e.; si $\Phi(t)$ es una solución y a alguna constante, entonces $\phi(t + a)$ también es solución del sistema.*

Los teoremas fundamentales de la teoría general de ecuaciones diferenciales son los llamados teoremas de existencia y unicidad que se estudian en los cursos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para nuestros fines la siguiente versión es adecuada, la cual presentamos sin demostración pudiéndose encontrar ésta en. (REFERENCIA)

Teorema 2.2. *(Teorema de Existencia y Unicidad). Sea $\dot{x} = F(t, x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales. Supongamos que t_0 es el tiempo inicial, x_0 el valor inicial y además F y $\frac{\partial F}{\partial x}$ son continuas. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una función $\Phi(t)$ definida para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ tal que $\phi(t)$ satisface el problema cuyo valor inicial es:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(t, x) \text{ y} \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

Además, dicha solución es única para $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

2.2. Trayectorias y Puntos Fijos-Retratos Fase

La curva proyección en \mathbb{R}^n de una solución particular $x = x_0(t)$ de un sistema de ecuaciones diferenciales, recibe el nombre de *trayectoria* u *órbita* de la solución. De aquí que una trayectoria es el subconjunto de \mathbb{R}^n dado por los puntos:

$$\alpha(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) \text{ con } t \in J \subset I$$

Es decir, una trayectoria es una curva en Ω parametrizada por las soluciones $(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$ del sistema (2.2); al conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se le conoce como espacio fase o de fases del sistema (2.2). Cuando el sistema es autónomo en virtud de la proposición (1.1), las trayectorias que pasan por un mismo punto en Ω se proyectan en la misma curva sin importar los valores de t , en consecuencia nombraremos *Retrato Fase* del sistema autónomo $\dot{x} = F(x)$ al conjunto de todas las trayectorias en el espacio fase de las soluciones de dicho sistema. Una importante consecuencia del teorema (1.1), en lo referente a la unicidad de soluciones, es que las trayectorias de dos soluciones distintas, $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$, no tienen ningún punto en común, *i.e.*, dos trayectorias distintas no se intersectan en el espacio fase.

Los sistemas autónomos son lo que se analizarán a partir de éste momento y en lo que resta de éste capítulo.

Sea

$$\dot{x} = F(x)$$

un sistema de ecuaciones diferenciales definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces el punto x_0 que satisface $F(x_0) = 0$ es llamado *punto de equilibrio*, *punto fijo* o *punto crítico* del sistema; en éste caso cualquier solución con condición inicial igual a x_0 es la solución constante $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = x_0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Es claro entonces que un punto de equilibrio también es una trayectoria.

Si cierta solución $\Phi = \phi(t)$ cumple que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$ entonces dicha solución es una función periódica, y su trayectoria es una curva cerrada simple, es así como recibe el nombre de *Trayectoria Cíclica* o *Ciclo*.

En algunos sistemas no lineales, pueden darse comportamientos especiales como los siguientes:

1. Si la trayectoria inicia en un punto de equilibrio y termina en ese mismo punto de equilibrio, se le conoce como *trayectoria homoclínica*.
2. Si x_1, x_2 son dos puntos de equilibrio distintos *i.e* $x_1 \neq x_2$. La trayectoria que inicia en x_1 y culmina en x_2 recibe el nombre de *trayectoria heteroclínica* vectorial

Consideremos el sistema de ecuaciones vectorial $F(x) = 0$ asociado al sistema de ecuaciones diferenciales (2.7) con $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \Omega$ es solución de dicho sistema vectorial si y sólo si $f_i(x) = 0$ para toda $i = \{1, 2, \dots, n\}$. Las ecuaciones $f_i(x) = 0$ si a caso tienen solución, casi siempre son ecuaciones de hipersuperficies en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dichas hipersuperficies reciben el nombre de *ceroclinas*. Es claro que el conjunto de puntos fijos del sistema (2.7) es la intersección de las *ceroclinas*.

2.2.1. Estabilidad

Probablemente el tema más importante en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales es el de estabilidad. Existen varias formas de estabilidad de interés para las aplicaciones de ecuaciones diferenciales, una de las más comunes es la de estabilidad en el sentido de Liapunov. Aunque en éste trabajo no hacemos realmente un análisis de estabilidad, por la importancia del tema, y por completez, damos las definiciones más importantes.

Se dice que un punto fijo x_0 es *estable* o bien *nodo estable*, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x(t)$ es una solución de (2.1) que satisface $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$ entonces $\|x(t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t > t_0$

Llamaremos a x_0 un punto fijo *asintóticamente estable* o *nodo asintóticamente estable* si x_0 es estable y si existe $\delta > 0$ tal que para cada solución x , si

$$\|\phi(t_0) - x_0\| < \delta \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = x_0$$

x_0 es un punto fijo *inestable* o bien un *nodo inestable*, si no es estable. El concepto de atractor surge en el contexto de los sistemas dinámicos como la región del espacio fase donde finalmente se realiza la dinámica del sistema. Un *atractor* de un sistema de dimensión n , es un conjunto cerrado y acotado hacia el cual se aproximan todas las trayectorias cuando $t \rightarrow \infty$. Los atractores poseen una *Cuenca de Atracción*, formada por todos los estados que son atraídos hacia él. Un caso particular es el siguiente: un punto x_0 es un *sumidero*, si existe una vecindad U de x_0 tal que para cualquier $x(t)$ con $x(t_0) \in U$ pertenece a U para $t \geq t_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = x_0$$

El abierto de ésta definición forma parte de la cuenca de atracción del sumidero. Y finalmente definimos la contra-parte de los sumideros: un punto fijo x_0 es una *fuentes* si existe una vecindad U de x_0 tal que para cualquier solución $x(t)$ con $x(t_0) \in U$ pertenece a U , para todo $t \leq t_0$ y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = x_0$$

2.3. Linealización

Frecuentemente un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = F(x) \tag{2.8}$$

se puede escribir de la forma:

$$\dot{x} = Ax + G(x) \tag{2.9}$$

(i.e. $F(x) = Ax + G(x)$) con $\frac{|G(x)|}{|x|} \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow 0$ y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y A es una matriz de $(n \times n)$ con coeficientes constantes. Podemos en éste caso decir que el sistema es semejante, en una vecindad del origen, al sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{2.10}$$

porque el residuo $G(x)$ es pequeño para x pequeña. De éste modo el análisis del sistema se puede hacer indirectamente analizando el sistema lineal asociado. Cuando el origen no es el punto fijo del sistema (2.8), mediante una traslación se puede llevar éste al origen y el análisis lineal local es enteramente igual, por lo que por el momento supondremos que 0 es un punto fijo del sistema (2.8).

El sentido en el que el sistema linealizado (2.10) y el sistema (2.8) son localmente semejantes es en el de equivalencia cualitativa, que básicamente consiste en lo siguiente: existe un homeomorfo local de una vecindad de 0 en \mathbb{R}^2 tal que las trayectorias de (2.8) cerca del punto de equilibrio, son mapeadas preservando la parametrización por tiempo, en las trayectorias de (2.10) de manera biyectiva. El siguiente teorema, conocido como *Teorema de Linealización*, es la base del análisis lineal de los sistemas no lineales (2.8), la demostración del mismo es demasiado técnica y está más allá de los objetivos

de éste trabajo, ésta se puede consultar en [10]. Un sistema lineal $\dot{x} = A(x)$ se dice que es *simple* si la matriz A no es singular, es decir; el determinante de A es distinto de cero y, por tanto A tiene eigenvalores distintos de cero. Un punto fijo de un sistema no lineal es un *punto fijo simple* si el sistema de su linealización es simple.

Un sistema lineal $\dot{x} = A(x)$ es llamado *hiperbólico*, si todos los eigenvalores de la matriz A tienen parte real distinta de cero. Un punto fijo de un sistema no lineal $\dot{x} = F(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un *punto fijo hiperbólico* si su sistema de linealización es hiperbólico.

Teorema 2.3. *Consideremos un sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x)$$

con un punto fijo hiperbólico $x = x_0$. Entonces en una vecindad alrededor del punto x_0 , el espacio fase del sistema y su linealización son cualitativamente equivalentes.

2.4. Sistemas de 2x2

El enfoque de éste trabajo son los sistemas de segundo orden, es por ello que a continuación se presenta información necesaria para el estudio de dichos sistemas.

Consideremos el sistema simple de dos dimensiones

$$\dot{x} = A(x) \quad (2.11)$$

donde A es una matriz de 2x2:

1. El origen es un punto fijo *asintóticamente estable* si los eigenvalores de A son negativos o tienen parte real negativa.
2. El origen es un punto fijo *inestable* si algunos de los eigenvalores de A son positivos o tienen parte real positiva
3. Si uno o más de los eigenvalores de A son imaginarios puros, el origen podría ser un punto fijo *nadamás estable*.

Dos matrices A y B se dice que son similares si existe una matriz constante no singular T tal que:

$$B = T^{-1}AT$$

La matriz T actúa como un homeomorfismo y el cambio de variable $x = Tx$ transforma el sistema (2.11) en el sistema lineal cualitativamente equivalente

$$\dot{z} = Bz \quad (2.12)$$

Si $\det A \neq 0$ cero no es un eigenvalor de A y el único punto de equilibrio del sistema (2.3) es el origen. Se puede demostrar que existe una matriz T real, no singular y de tal manera que B es igual a una de las siguientes matrices [12]:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donde $\mu < \lambda < 0$ ó $0 < \mu < \lambda$

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donde $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$

3. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donde $\mu < 0 < \lambda$

4. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donde $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$

5. $\begin{pmatrix} \sigma & \nu \\ -\nu & \sigma \end{pmatrix}$ donde $\sigma, \nu \neq 0$ es decir $\sigma > 0$ ó $\sigma < 0$

Si los valores de A son complejos conjugados $\sigma \pm i\nu$

6. $\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{pmatrix}$ con $\nu \neq 0$

Si los valores de A son complejos conjugados $\pm i\nu$

Repasemos ahora los retratos fase de cada uno de los seis tipos considerados, los retratos fase de un sistema lineal arbitrario $\dot{x} = Ax$ difieren de los construidos a continuación por el sistema (2.12) por el hecho de que la matriz de transformación T simplemente los distorsiona manteniéndolos equivalentes.

CASO 1. Nodo Impropio

La solución de (1.13) a través del punto $(\eta_1, \eta_2) \neq (0, 0)$ en $t = 0$ es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \eta_1 \\ e^{\mu t} & \eta_2 \end{pmatrix}$$

Si $\mu < \lambda < 0$. Tenemos que $\Phi(t) \rightarrow 0$, si $t \rightarrow +\infty$ y obtenemos el siguiente retrato fase.

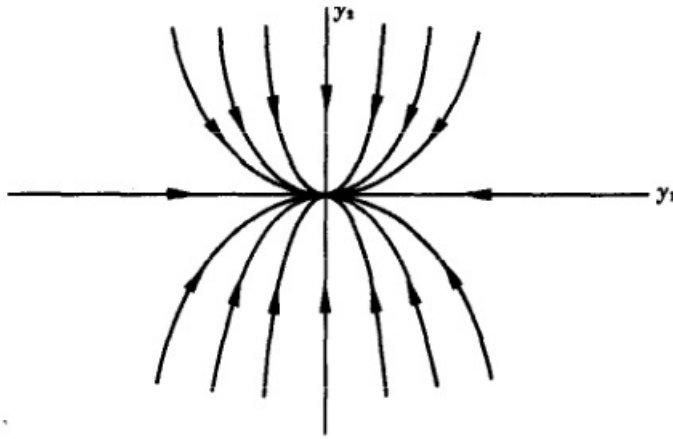


Figura 2.1: Nodo Impropio $\mu < \lambda < 0$

Si $0 < \mu < \lambda$ retrato fase es de la siguiente manera:

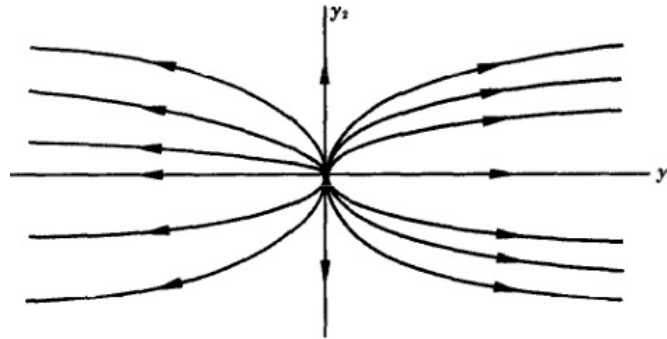


Figura 2.2: Nodo Impropio $0 < \mu < \lambda$

CASO 2. Nodo Propio

Nuevamente la solución de (1.13) a través del punto $(\eta_1, \eta_2) \neq 0$ en $t = 0$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \eta_1 \\ e^{\mu t} & \eta_2 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda > 0$ el retrato fase que se obtiene es:

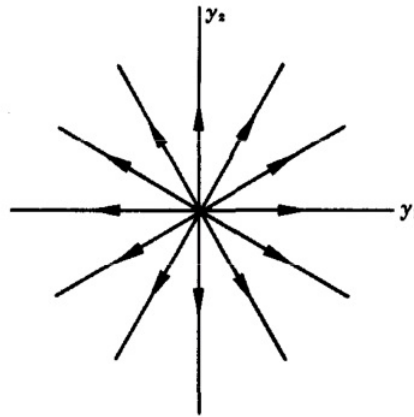


Figura 2.3: Nodo Propio $\lambda > 0$

Si $\lambda < 0$ obtenemos el plano fase como sigue:

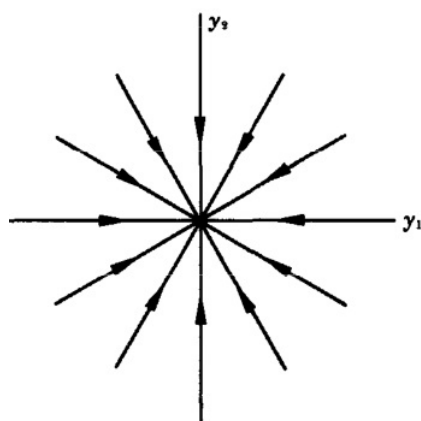


Figura 2.4: Nodo Propio $\lambda < 0$

CASO 3. Punto Silla

En éste caso, la solución

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \eta_1 \\ e^{\mu t} & \eta_2 \end{pmatrix}$$

pero como ahora $\mu < 0 < \lambda$, la solución a través del punto (η_1, η_2) satisface:

- $t \rightarrow \infty$ entonces $\Phi_1(t) \rightarrow \pm\infty$
- $t \rightarrow +\infty$ entonces $\Phi_2(t) \rightarrow 0$

Si $|\lambda| = |\mu|$ las trayectorias serán hipérbolas rectangulares. Ahora, si $\lambda > 0$, $\mu < 0$, las curvas son:

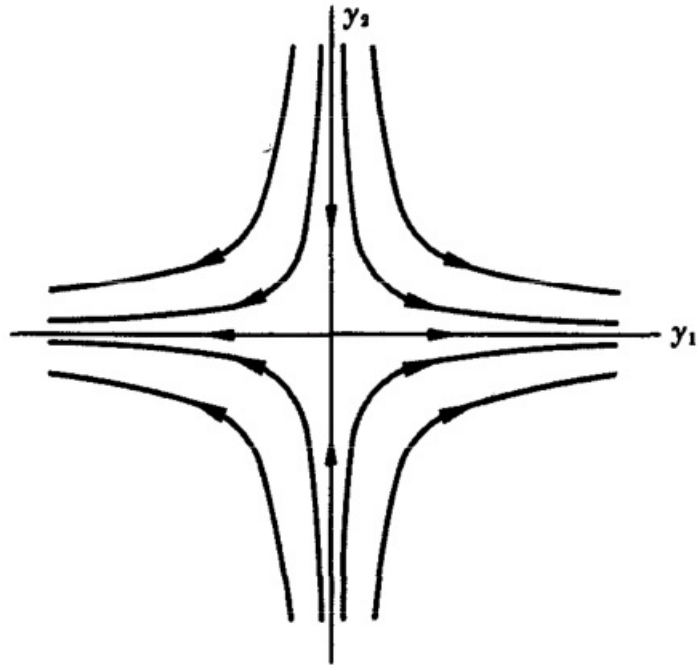


Figura 2.5: Silla

CASO 4. Nodo Impropio

Para éste caso tenemos que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 t \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\eta t}$$

es la solución que pasa por el punto (η_1, η_2) en $t = 0$. Si $\lambda < 0$. El retrato fase se caracteriza porque cada trayectoria tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

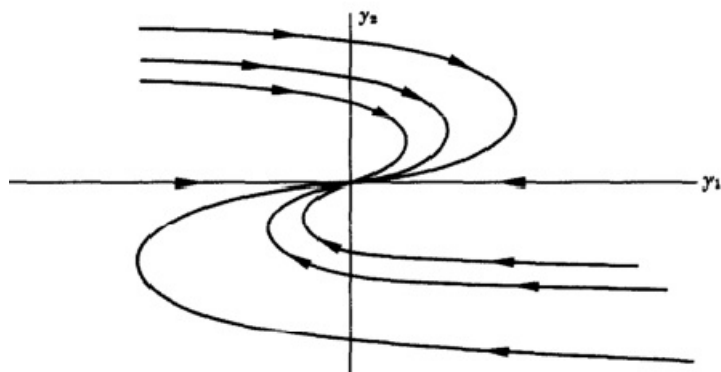


Figura 2.6: Nudo Propio

CASO 5. Puntos Espirales o Focos

La solución donde $\nu > 0$ y que pasa por (η_1, η_2) en $t = 0$ es:

$$\Phi(t) = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \rho \cos vt + \eta_2 \operatorname{sen} vt \\ -\eta_1 \operatorname{sen} vt + \eta_2 \cos vt \end{pmatrix}$$

Haciendo $\rho = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2}$, $\cos \alpha = \frac{\eta_1}{\rho}$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\eta_2}{\rho}$.

Entonces

$$\Phi(t) = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \rho \cos(vt - \alpha) \\ -\rho \operatorname{sen}(vt - \alpha) \end{pmatrix}$$

Tomando ahora las coordenadas polares r, θ

$$y_1 = r \cos \theta$$

$$y_2 = r \operatorname{sen} \theta$$

podemos escribir la solución en la forma polar de la forma

$$r(t) = \rho e^{\sigma t}$$

$$\theta(t) = -(\nu t - \alpha).$$

Eliminando el parámetro t y considerando a $A = \rho e^{(\frac{\sigma}{\nu})\alpha}$ tenemos

$$r = A e^{(\frac{\sigma}{\nu})\theta}$$

Así, el retrato fase es una familia de espirales.

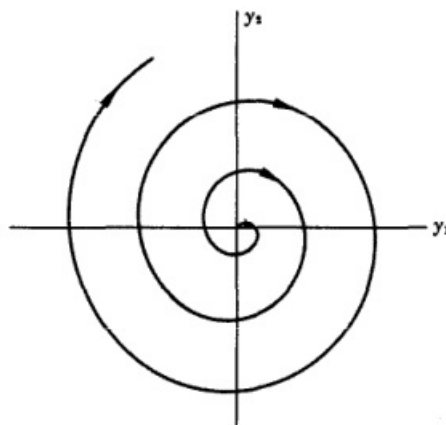


Figura 2.7: Espiral

Para el caso $\sigma > 0, \nu > 0$. Las órbitas se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$.

CASO 6. Centro

Cuando se tiene que $\sigma = 0$ las trayectorias son círculos de radio p , orientadas por $\nu > 0$.

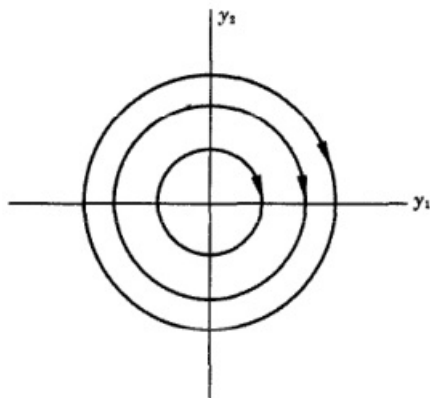


Figura 2.8: Centro

Las trayectorias de (1.13) tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ si y sólo si ambos eigenvalores de A , tienen parte real negativa. En éste caso las soluciones tienden a cero y decimos que el origen es atractor.

2.5. Primeras Integrales

La linealización proporciona un método práctico para encontrar el retrato fase de un sistema no lineal, pero solamente de manera local alrededor de los puntos fijos. Una manera común de encontrar las trayectorias y el retrato fase global de sistemas no lineales es por medio de primeras integrales.

Definición 2.4. *Una función continuamente diferenciable $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una primera integral del sistema (2.8) en la región D si $f(x(t))$ es constante para cualquier solución $x(t)$ del sistema.*

Si f es una primera integral para el sistema (2.8), entonces

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = 0$$

es decir;

$$\dot{x}_1(t)f_{x_1}(x(t)) + \dot{x}_2(t)f_{x_2}(x(t)) = F_1(x(t))f_{x_1}(x(t)) + F_2(x(t))f_{x_2}(x(t)) = 0,$$

en donde el campo vectorial del sistema (2.8) es $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ y $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es una solución de (2.8).

Reciben el nombre de primeras integrales porque regularmente se obtienen de la integración simple de la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)} \quad (2.13)$$

con $(x_1, x_2) \in D \subset \Omega$.

Si las soluciones de (2.13) satisfacen

$$f(x_1, x_2) = c$$

con $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y c una constante, entonces f es una primera integral de (2.8) en D .

Ahora considérese la curva de nivel

$$L_c = \{x | f(x) = c\}$$

y sea $x_0 \in L_c$ y $\alpha(t)$ una trayectoria del sistema que pasa por el punto x_0 en el plano fase, como f es una primera integral entonces $f(\alpha(t))$ es constante y $f(\alpha(t)) = f(x_0) = c$. Por tanto la trayectoria que pasa por x_0 se posiciona en L_c .

Cuando f es una primera integral, ésta es constante en cada trayectoria de Ω , en consecuencia, cada trayectoria es parte de alguna curva de nivel de f . De aquí que la curva de nivel es unión de trayectorias. La unicidad de las soluciones del sistema de ecuaciones (2.8) garantiza que la unión de las trayectorias es disjunta. Así pues el retrato fase del sistema (2.8) se puede reconstruir encontrando las curvas de nivel de una primera integral. En los siguientes capítulos se encontrarán varios ejemplos de esto.

Si f es una primera integral de (2.8), entonces cualquier composición de f con una función real $g : h = g(f)$ es una primera integral, en particular sumar o multiplicar por constantes a f da nuevamente primeras integrales.

Definición 2.5. *Un sistema que tiene una primera integral en la totalidad del plano fase (i.e $D = \mathbb{R}^2$) se dice que es conservativo.*

Las ecuaciones de movimiento de los sistemas conservativos es construida por el *Hamiltoniano* $H(x, p)$ donde x representa la posición y p el momento.

Las ecuaciones de movimiento se conocen como Ecuaciones de Hamilton. Éstas son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}$$

Aquí el Hamiltoniano $H(x, p)$ resulta ser una primera integral del sistema de Hamilton porque :

$$\frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) = \dot{x} \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{d}{dt}H = 0$$

y por lo tanto H permanece constante a lo largo de la trayectoria, en otras palabras, H es una constante o cantidad conservada del movimiento.

En varios ejemplos el Hamiltoniano se construye como la suma de la energía cinética con la potencial, es decir; es de la forma:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + V(x)$$

Capítulo 3

EDP's y soluciones de tipo onda viajera

3.1. EDP's como Sistemas Dinámicos

Frecuentemente la ecuación (2.2) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = f \left(x_1, \dots, x_n, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1}, \dots, \partial^{k_n} x_n \right) = 0 \quad (3.1)$$

y tal ecuación describe la evolución temporal de un sistema dinámico en un espacio de funciones. Es decir, si $u(t, x)$ es una solución de (2.2), entonces es una función del tiempo t con valores en un espacio de funciones, $t \rightarrow u(t, x) = u_t(x)$ que en el transcurso del mismo va tomando diferentes valores, siendo cada uno de ellos una función de la variable espacial multidimensional $x = (x_1, \dots, x_n)$. Podemos formular en forma compacta la ecuación (3.1) como:

$$\dot{u} = F(u) \quad (3.2)$$

donde F es un operador diferencial definido en un espacio de funciones F . Éste espacio consiste en funciones definidas en alguna región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

que satisfacen algunas condiciones especiales de regularidad, tanto ellas como sus derivadas, y algunas otras condiciones definidas en la frontera de Ω . En muchos casos F es un subespacio de un **Espacio de Sobolev**

$$W^{kp}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^p(\Omega) \forall 1 \leq i \leq k \right\}. \quad (3.3)$$

Una vez descrita la forma en que se pueden tomar las condiciones de frontera, es decir, definido el espacio F , para proceder a la solución de la EDP (2.1) se deben dar las *condiciones iniciales*. La búsqueda se reduce entonces a lo que se conoce como el PROBLEMA DE CAUCHY, el cual consiste en hallar la solución de (2.2) que satisfaga, para $t = t_0$, las condiciones iniciales

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \rho^k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 0, 1, \dots, l. \quad (3.4)$$

Es decir, para un cierto valor de $t = t_0$ se dan valores iniciales (funciones) de las funciones incógnitas u_i hasta las derivadas de orden n .

Ilustremos estas ideas con un ejemplo clásico

ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE

Consideremos el movimiento ondulatorio vertical de una cuerda vibrante horizontal de longitud L , de densidad constante y composición homogénea no sometida a fuerzas externas y $u(x, t)$ el desplazamiento vertical respecto a la posición de equilibrio del punto $x \in [0, L]$. La ecuación en derivadas parciales correspondiente es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

$c > 0$ representa la velocidad a la que se propagan las ondas.

Las condiciones naturales de frontera son:

$$U(0) = u(L) = 0$$

Pues se supone la cuerda fija por los extremos. Para éste caso

$$F = \{f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2, f(0) = f(L) = 0\}$$

Observemos qué condiciones iniciales plausibles para el problema de la cuerda vibrante pueden tener derivada no continua, por ejemplo si la cuerda es tensada en algún punto intermedio del intervalo $[0, L]$. Estamos forzados entonces a ampliar la idea de diferenciabilidad. El desarrollo sistemático e histórico de ésta cuestión ha dado lugar a considerar una clasificación de la naturaleza de las soluciones:

- **Solución clásica:** son aquellas en que la derivada tiene el sentido usual del cálculo diferencial.
- **Solución débil:** también llamada **solución generalizada**, es una función en la cual las derivadas que aparecen en la ecuación pueden no todas existir en el sentido clásico de derivación de funciones.

Comúnmente, éstas soluciones satisfacen una ecuación integral que, en algún sentido definido con precisión, es equivalente a la ecuación diferencial original.

3.1.1. Soluciones de Tipo Onda Viajera

Una solución de la ecuación (2.2) se dice que es de *onda viajera* si es de la forma

$$u(t, x) = u(x - vt) \tag{3.6}$$

donde v es la *velocidad* a la que viaja la onda. Si se hace el cambio de variable $z = x - vt$, entonces la función u es una composición de funciones $u(t, x) = u(z(x, t))$. Usando la regla de la cadena, cuando se hace el cambio de variable mencionado, la ecuación en derivadas parciales (2.2) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-v)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = v^2 \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -v \frac{d^2 u}{dz^2}$$

En general

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial t^m} = (-v)^m \frac{d^n u}{dz^n} \quad (3.7)$$

donde $k + m = n$. Unos ejemplos nos permitirán observar ésto con claridad.

EJEMPLOS

1. ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{mc^2}{h} u = 0$$

Realizando la sustitución correspondiente

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - c^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{mc^2}{h} u = 0$$

De aquí que la ecuación diferencial ordinaria resultante es:

$$(v^2 - c^2) \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{mc^2}{h} u = 0$$

2. ECUACIÓN BIHARMÓNICA

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0$$

La cual al realizar la sustitución correspondiente es escrita como la EDO:

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + c^2 \frac{d^4 u}{dz^2} = 0$$

3. ECUACIÓN DE BOUSSINESQ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0$$

Realizando la sustitución adecuada

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \alpha^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \beta^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0$$

Entonces la EDO resultante es:

$$(v^2 - \alpha^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - \beta^2 v^2 \frac{d^4 u}{dz^4} = 0$$

4. ECUACIÓN DE KOTERWEG-DE VRIES (KdV)

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \beta u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Entonces la EDO resultante es:

$$\frac{d^3 u}{dz^3} - (\beta u + v) \frac{du}{dz}$$

5. ECUACIÓN DEL TELÉGRAFO

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + bU = 0$$

La EDO resultante es:

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - c^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \alpha v \frac{du}{dz} + bu = 0$$

6. ECUACIÓN DE BENJAMIN-BONA-MAHONY

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

Su EDO correspondiente es:

$$-v \frac{du}{dz} + \frac{du}{dz} + u \frac{du}{dz} - v \frac{d^3 u}{dz^3} = 0$$

7. ECUACIÓN CAMASSA-HOLM (C-H)

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

A la cual le corresponde la siguiente EDO

$$-v \frac{d^3 u}{dz^3} + \left[2 \frac{du}{dz} + u \right] \frac{d^2 u}{dz^2} - [3u + v] \frac{du}{dz} = 0$$

3.2. Ejemplos de trayectorias de la ecuación (3.1)

Una EDO de orden dos se puede transformar en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de la siguiente manera: si

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (3.8)$$

hacemos el cambio de variable $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y el sistema equivalente es

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$$

(es claro que éste método se puede generalizar a una EDO de cualquier orden transformándose en un sistema), la solución $x_1(t)$ del sistema es una solución de la ecuación original. Cuando se tienen las trayectorias en el plano fase del sistema entonces la primera componente de éstas se identifica con la solución de la original, lo cual nos permite tener un conocimiento cualitativo de tal solución.

En el siguiente capítulo se examinan con detalle soluciones de tipo onda viajera de dos modelos importantes en las aplicaciones de EDP; la metodología consiste en hacer el cambio de variable $z = x - vt$ y hacer un análisis cualitativo de los retratos fase resultantes de transformar la ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. A manera de ilustración, en los siguientes ejemplos se presenta un esbozo de cuatro distintos tipos de trayectorias de sistemas lineales, donde cada trayectoria representa una solución distinta $u(t, x) = u(z)$ de alguna hipotética EDP de orden dos y finalmente el esbozo de la superficie integral resultante a la solución.

- NODO IMPROPIO

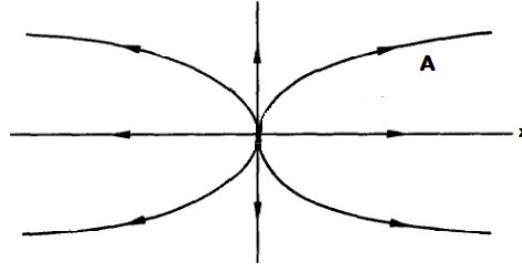


Figura 3.1: Trayectoria A

La solución correspondiente a A es de la forma

$$u(z) = e^{\lambda z} + e^{\mu} z \text{ con } 0 < \mu < \lambda$$

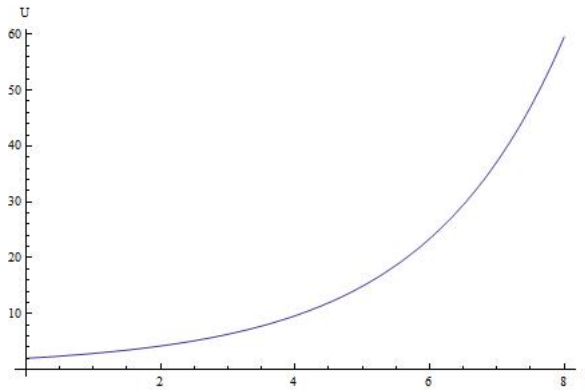


Figura 3.2: Representación Geométrica de $U(z)$

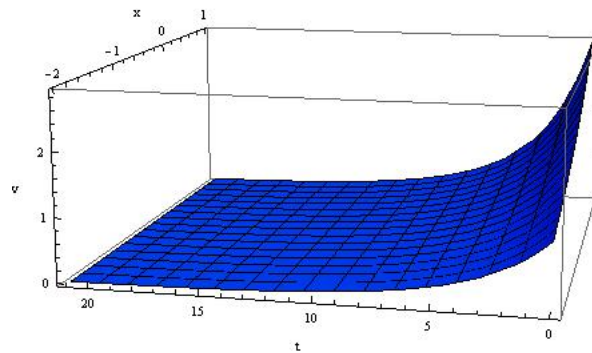


Figura 3.3: Onda Resultante

■ NODO IMPROPIO

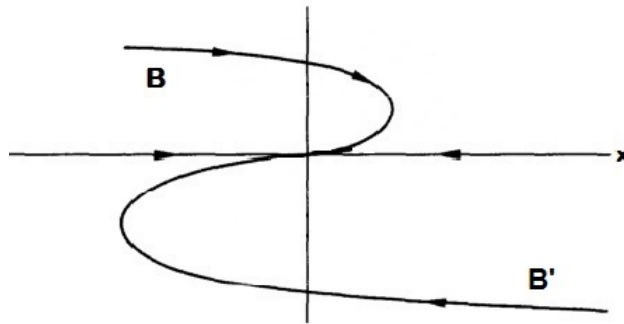


Figura 3.4: Impropio

En la figura [2.4] se muestran dos trayectorias \mathbf{B}, \mathbf{B}' que engañosamente pudiéramos imaginar que se intersectan en el origen, pero sabemos ya que dos trayectorias no se pueden intersectar, es así que \mathbf{B}, \mathbf{B}' , son curvas ajenas parametrizadas por la solución $\Phi(s) = (\eta_1 + \eta_2 s) e^{\lambda s}$ de la cual

- Si $\lambda < 0$ el resultado es la solución correspondiente a **B** ver Figura [3.5].

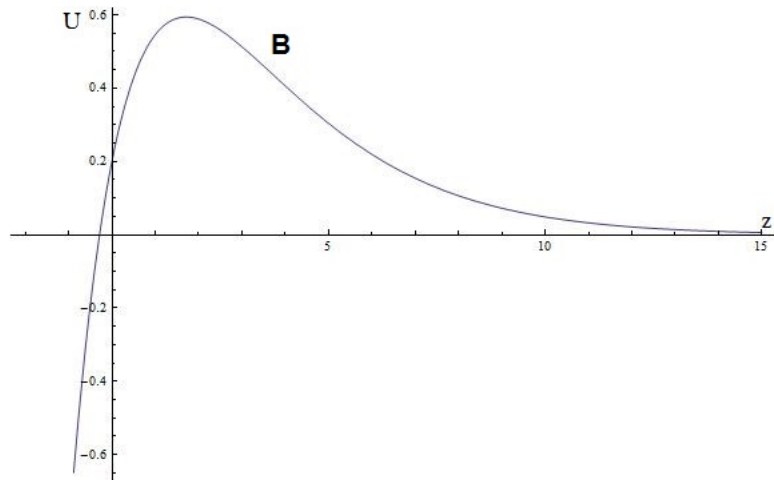


Figura 3.5: Representación Geométrica

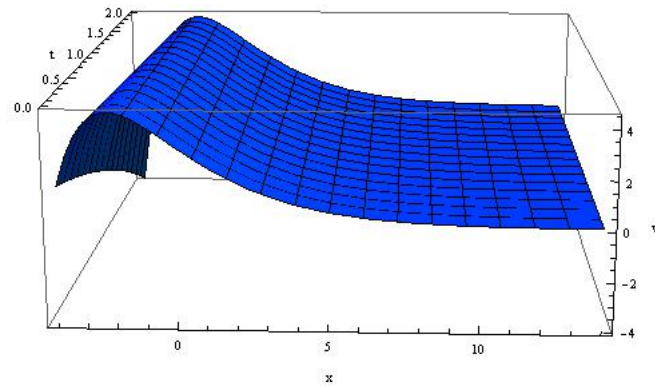


Figura 3.6: B

- Si $\lambda > 0$ la solución correspondiente acorde a la trayectoria \mathbf{B}' es como se muestra en la Figura [3.7]

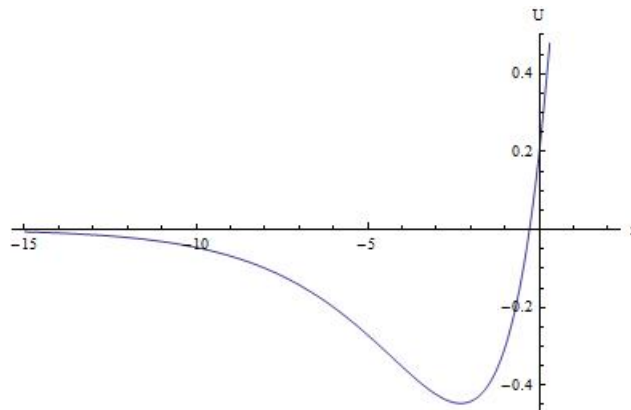


Figura 3.7: B'

por tanto la onda resultante es:

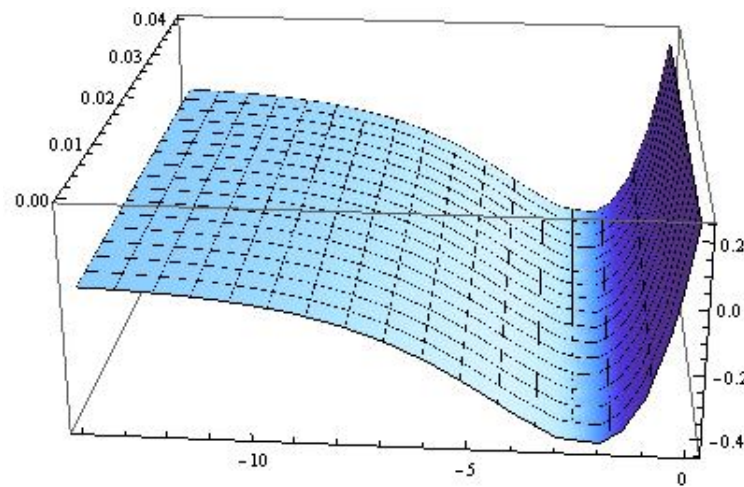


Figura 3.8: Onda

- PUNTOS ESPIRALES

Cuando la trayectoria es como se muestra en la Figura [3.9]

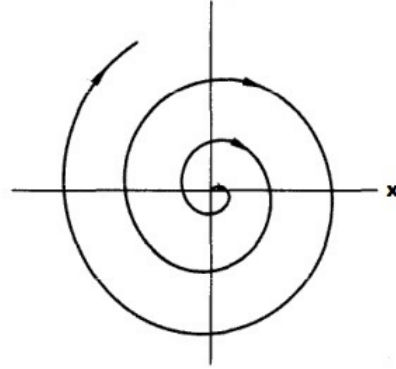


Figura 3.9: Trayectoria

La solución es del tipo ver Figura [3.10]

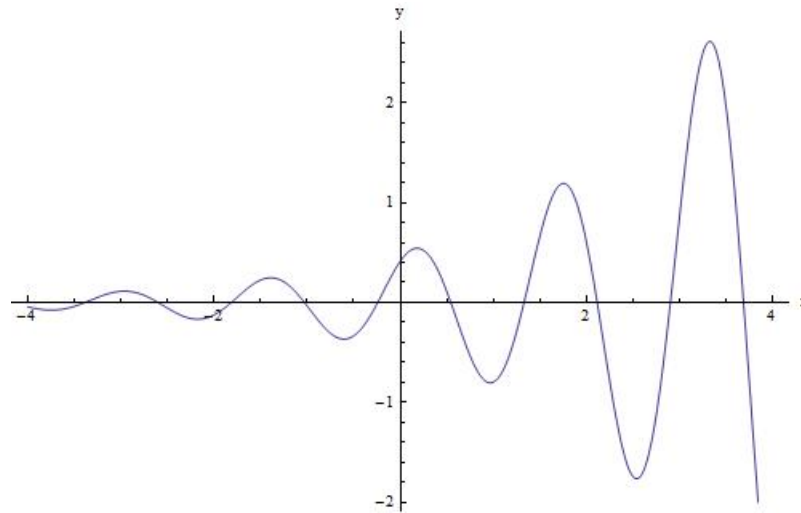


Figura 3.10: Solución de onda

Por tanto

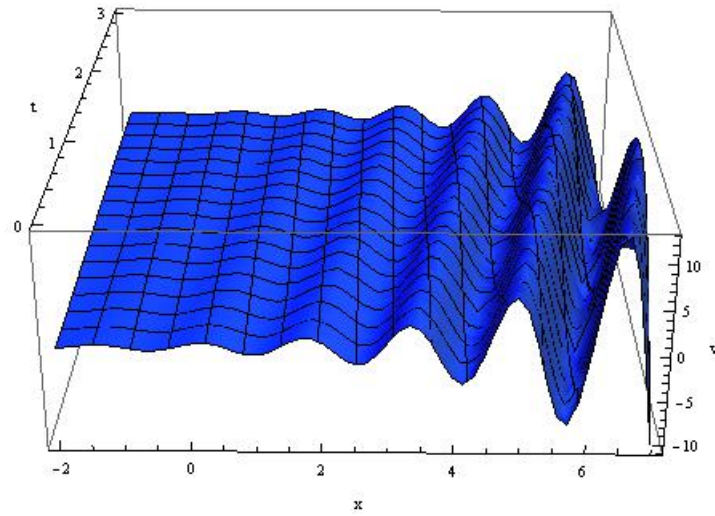


Figura 3.11: Onda Resultante

■ **CENTRO**

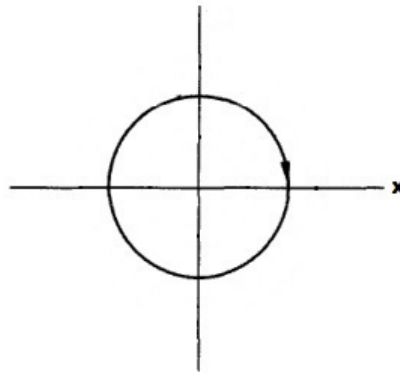


Figura 3.12: Trayectoria

La trayectoria corresponde a la solución del tipo $\mu \cos(vt - \alpha)$ a la que le corresponde el esbozo de la figura [3.12]

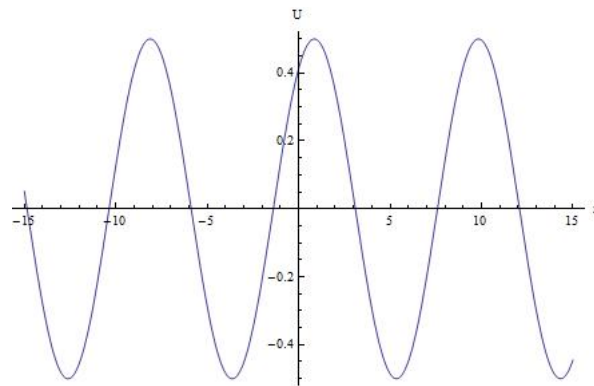


Figura 3.13: Solución de onda

Por tanto

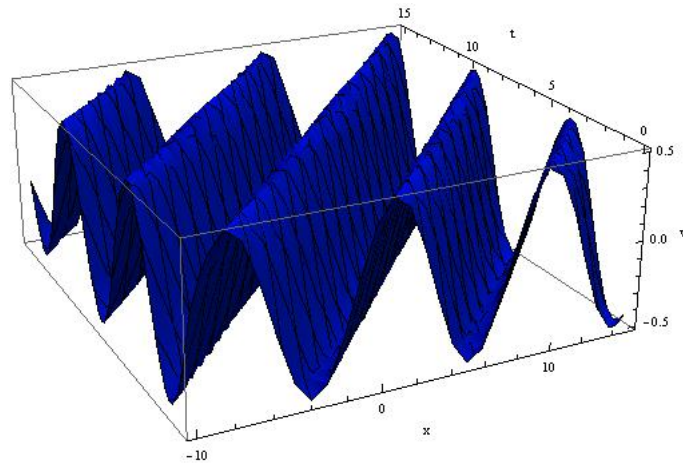


Figura 3.14: Onda Resultante

Capítulo 4

Análisis en el Plano Fase de las Ecuaciones de Heimbürg-Jackson y F.Ongay-A.Agüero

4.1. Ecuación de T. Heimbürg-Jackson

La ecuación que describe el suceso a lo largo de la fibra nerviosa de la cual se habla en la introducción es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (c_0^2 + pu + qu^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - h \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (4.1)$$

Se hace el cambio de variable $z = x - vt$ que se interpreta como la onda que se propaga sin deformarse cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$. Entonces $u(z(x, t)) = u(x - vt)$, teniendo al derivar por regla de la cadena lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-v)^2 \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Sustituimos las derivadas en (4.1)

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left\{ (c_0^2 + pu + qu^2) \frac{du}{dz} \right\} - h \frac{d^4 u}{dz^4} \quad (4.2)$$

Entonces

$$v^2 \frac{du}{dz} = (c_0^2 + pu + qu^2) \frac{du}{dz} - h \frac{d^3 u}{dz^3} + c_1 \quad (4.3)$$

es el resultado de integrar (4.2), la cual bajo cálculos sencillos es equivalente a:

$$(c_0^2 - v^2) \frac{du}{dz} + pu \frac{du}{dz} + qu^2 \frac{du}{dz} - h \frac{d^3 u}{dz^3} = 0 \quad (4.4)$$

tomando en cuenta $c_1 = 0$.

Posteriormente realizamos una nueva integración en la ecuación (4.4) obteniendo lo siguiente:

$$(c_0^2 - v^2) u + \frac{p}{2} u^2 + \frac{q}{3} u^3 - h \frac{d^2 u}{dz^2} + c_2 = 0 \quad (4.5)$$

Donde c_2 es una constante de integración. De aquí que:

$$(c_0^2 - v^2) u \frac{du}{dz} + \frac{p}{2} u^2 \frac{du}{dz} + \frac{q}{3} u^3 \frac{du}{dz} - h \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{du}{dz} + c_2 \frac{du}{dz} = 0 \quad (4.6)$$

pues multiplicamos la ecuación (4.5) por $\frac{du}{dz}$. Para finalmente realizar una última integración en (4.6) y así concluir con la siguiente ecuación

$$2(c_0^2 - v^2) \frac{u^2}{2} + 2\frac{p}{2} \frac{u^3}{3} + 2\frac{q}{3} \frac{u^4}{4} - 2h \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + 2c_2 = 0 \quad (4.7)$$

por lo cual

$$\frac{q}{6} u^4 + \frac{p}{3} u^3 + (c_0 - v_0) u^2 + 2c_2 u = 2h \frac{du}{dz} \quad (4.8)$$

Renombremos los coeficientes de la ecuación (4.8) como sigue:

$$q_1 = \frac{q}{6} \quad p_1 = \frac{p}{3} \quad r = (c_0 - v_0) \quad C = 2c_2$$

Resultando la ecuación (4.9)

$$h \left(\frac{du}{dz} \right)^2 u^2 = q_1 u^4 + p_1 u^3 + r u^2 + C u + V_0 \quad (4.9)$$

Se realiza el cálculo del Hamiltoniano como sigue.

Sea

$$x = U \quad y = \frac{du}{dz}$$

$$\dot{x} = \frac{du}{dz} \quad \dot{y} = \frac{d^2 u}{dz^2}$$

De (4.8)

$$H(x, y) = y^2 - (q_1 x^4 + p_1 x^3 + r x^2 + C x + V_0) \quad (4.10)$$

Entonces las ecuaciones del Hamiltoniano son:

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\partial H}{\partial y} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2rx + 3p_1x^2 + 4q_1x^3 + C$$

Así el potencial está dado por:

$$V(u) = -(q_1u^4 + p_1u^3 + ru^2 + Cu + V_0) \quad (4.11)$$

Para algún valor de V_0 es posible escribir el potencial de tal manera que sea tangente a x .

Retomando la ecuación (4.8), tal ecuación se puede representar de la siguiente manera:

$$(\dot{u})^2 = (u - u_0)^2 ((u - u_0)^2 + m(u - u_0) + n) \quad (4.12)$$

Desarrollando el polinomio de la ecuación resultante (4.11) es decir,

$$\begin{aligned} & (u - u_0)^2 ((u - u_0)^2 + m(u - u_0) + n) \\ &= (u^2 - 2uu_0 + U_0^2)(u^2 - 2uu_0 + u_0^2 + mu - mu_0 + n) \\ &= u^4 - 4uu^3u_0 + muu^3 + 6u^2u_0^2 - 3mu^2u_0 + nu^2 - 4uu_0^3 + 3muu_0^2 - \\ & 2nuu_0 + u_0^4 - mu_0^3 + nu_0^2 \\ &= u^4 + 3(m - 4u_0)u^2 + u^2(6u_0^2 - 3u_0m + n) + u(-4u_0^3 + 3mu_0^2 - 2nu_0) + \\ & u_0^2(u_0^2 - mu_0 + n) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes del término cúbico, lineal e independiente de la igualdad resultante con los coeficientes del potencial a fin de hallar valores numéricos para m, n, V_0 es decir,

1. $m - 4U_0 = p_1$

$$\Rightarrow m = 4U_0 + p_1$$

$$2. \quad 3mU_0^2 - 4U_0^3 - 2nU_0 = C$$

$$\Rightarrow n = \frac{C + 4u_0^3 - 3mu_0^2}{-2u_0}$$

$$3. \quad V_0 = u_0^2 (u_0^2 - mu_0 + n)$$

Ahora, sea $r = z - z_0$ entonces de la ecuación (4.11) se tiene que:

$$\dot{r} = r\sqrt{r^2 + mr + n}$$

que equivale a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\sqrt{r^2 + mr + n}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \cosh^{-1} \left(\frac{2n + mr}{\pm\sqrt{m^2 - 4nr}} \right) - \left[-\frac{1}{\sqrt{n}} \cosh^{-1} \left(\frac{2n + mr_0}{\pm\sqrt{m^2 - 4nr_0}} \right) \right] \end{aligned}$$

Entonces

$$u(z) = \frac{2n}{\pm\sqrt{m^2 - 4n} \cosh(A - \sqrt{n}s) - m} + u_0 \quad (4.13)$$

Donde

$$A = \cosh^{-1} \left(\frac{2n + mr_0}{\pm\sqrt{m^2 - 4nr_0}} \right)$$

El retrato fase correspondiente, está conformado por distintos tipos de trayectorias, pues recordemos que por cada condición inicial diferente, obtendríamos una curva de nivel distinta.

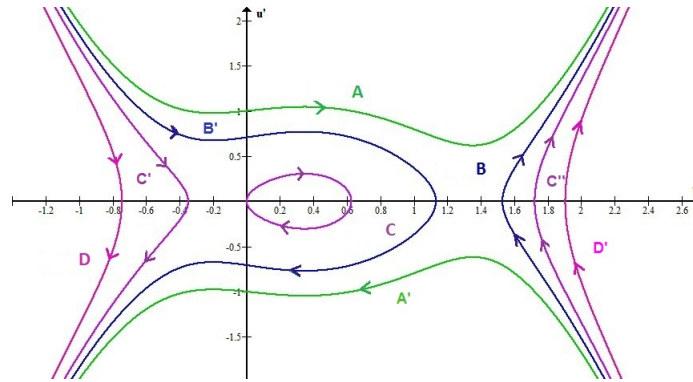


Figura 4.1: Retrato fase

En la figura anterior se muestra el retrato fase para cuatro tipos de las cuales tenemos lo siguiente:

$$\lim_{z \rightarrow z_0^+} A = \lim_{z \rightarrow z_0^+} B = \lim_{z \rightarrow z_0^+} C'' = \lim_{z \rightarrow z_0^+} D' = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0^-} A' = \lim_{z \rightarrow z_0^+} B' = \lim_{z \rightarrow z_0^-} C' = \lim_{z \rightarrow z_0^-} D = -\infty$$

y finalmente el $\lim_{z \rightarrow z_0^+} C$ no existe.

pero en el presente trabajo sólo es de nuestro interés las soluciones de tipos solitónico de las cuales se muestra su análisis en el ejemplo 1 y ejemplo 2. A continuación se presentan ejemplos en los cuales se asignan valores a los parámetros r , C , u_0 , p_1 q_1 , por cada uno; debidamente obtenidos todos ellos de acuerdo al artículo [3] y posteriormente realizar el cálculo del potencial con respecto a (4.11) y a partir de ello obtener el esbozo del potencial. Finalmente poder rectificar que se obtienen trayectorias distintas de la solución (4.13). De éste modo y de acuerdo a las definiciones establecidas en el capítulo, poder visualizar el retrato fase obteniendo finalmente que la solución para la ecuación de T. Heimburg -Jackson en efecto es de tipo solitónico.

1. EJEMPLO

Sea $r = 0$, $C = 1,728$, $u_0 = 1,2$, $p_1 = -2$, $q_1 = -1$, $r_0 = 2$.

Ahora busquemos los valores correspondientes a m, n, V_0 , esto es:

$$m = -2 + 4(1,2)$$

$$m = 2,8$$

$$n = \frac{1,728 + 4(1,2)^3 - 3(2,8)(1,2)^3}{-2(1,2)}$$

$$n = 1,44$$

$$V_0 = (1,2)^2 ((1,2)^2 - 2,8(1,2) + 1,44)$$

$$V_0 = -0,6912$$

Entonces el potencial es:

$$V(u) = (u^4 - 2u^3 + 1,728u - 0,6912)$$

El cual tiene por esbozo:

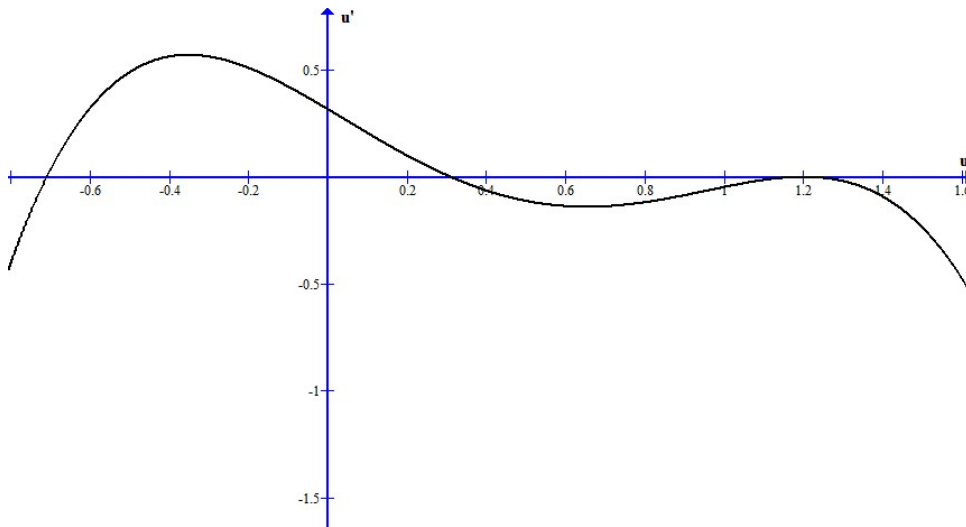


Figura 4.2: Potencial

Haciendo uso de los valores numéricos encontrados, el esbozo de la trayectoria queda como sigue:

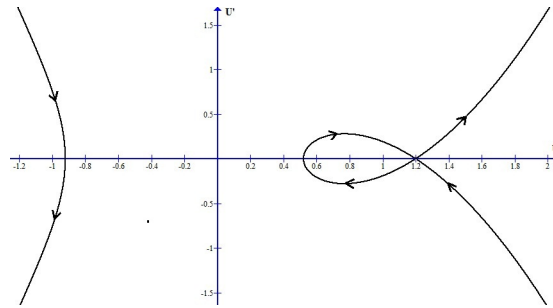


Figura 4.3: Trayectoria

Ahora, el valor correspondiente a A es:

$$\begin{aligned}
 A &= \cosh^{-1} \left(\frac{2(1,44) + 2,8(2)}{\sqrt{(2,8)^2 - 4(1,44)(2)}} \right) \\
 &= \cosh^{-1} (2,9391208) \\
 &= 1,74126
 \end{aligned}$$

De aquí que:

$$u(z) = \frac{2(1,44)}{\pm \sqrt{(2,8)^2 - 4(1,72)\cosh(1,74126 - \sqrt{1,44}s)} - 2,8} + 1,2$$

$$u(z) = \frac{2,88}{-1,44222\cosh(1,74126 - 1,2s) - 2,8} + 1,2$$

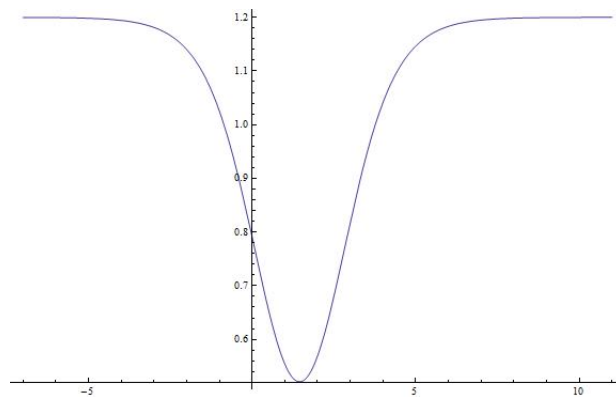


Figura 4.4: Solución de Onda Viajera

A continuación se puede ver en la Figura[3.5] el resultado de involucrar a la variable t la cual interpretamos como el tiempo, es así que obtenemos una onda que se propaga sin tener deformación alguna conforme $t \rightarrow \infty$. *i.e.* un solitón.

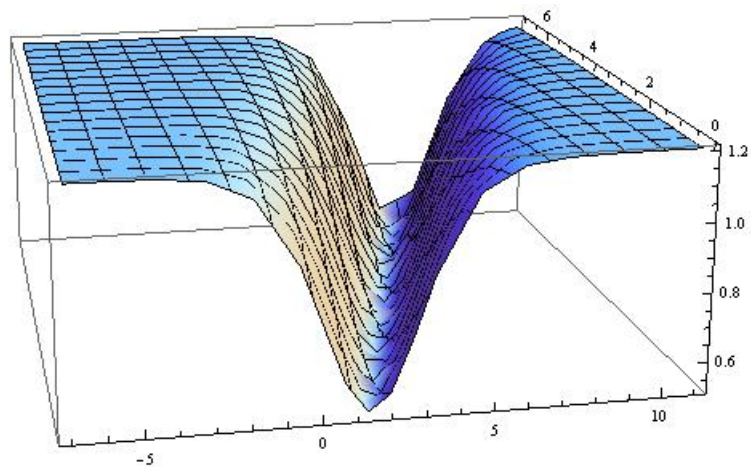


Figura 4.5: Solitón

2. EJEMPLO

Sea $r = 0,26$, $C = 0,376$, $U_0 = -0,2$, $p_1 = -2$, $q_1 = -1$, $r_0 = 2$.

$$m = -2 + 4(-0,2)$$

$$\Rightarrow m = -2,8$$

$$n = \frac{0,376 + 4(-0,2)^3 - 3(-2,8)(-0,2)^2}{-2(-0,2)}$$

$$n = 1,7$$

$$V_0 = (-0,2)^2 ((-0,2)^2 + 2,8(-0,2) + 1,7)$$

$$V_0 = 0,092$$

El potencial correspondiente es:

$$V(u) = u^4 - 2u^3 + 0,26u^2 + 0,376u$$

El cual se muestra en la siguiente gráfica:

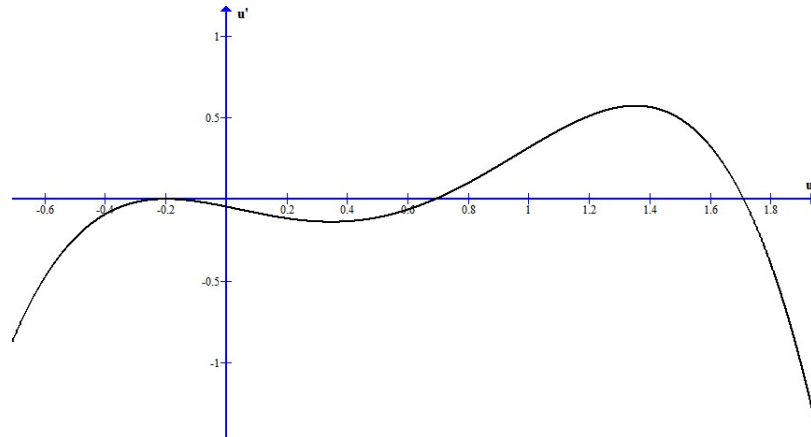


Figura 4.6: Potencial

Haciendo uso de los valores numéricos encontrados, el esbozo de la trayectoria queda como sigue:

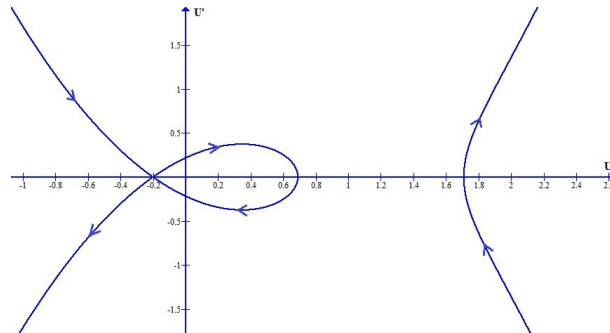


Figura 4.7: Trayectoria

Ahora, el valor correspondiente a A es:

$$\begin{aligned} A &= \cosh^{-1} \left(\frac{2(1,7) - 2,8(2)}{\pm \sqrt{(-2,8)^2 - 4(1,7)(2)}} \right) \\ &= \cosh^{-1}(1,078639) \\ &\Rightarrow A = 0,394029 \end{aligned}$$

De aquí que:

$$u(s) = \frac{2(1,7)}{\pm \sqrt{(-2,8)^2 - 4(1,7)} \cosh(0,394029 - \sqrt{1,7}s)} - 0,2$$

$$u(s) = \frac{3,4}{1,019803 \cosh(0,394029 - 1,3038s) + 2,8} - 0,2$$

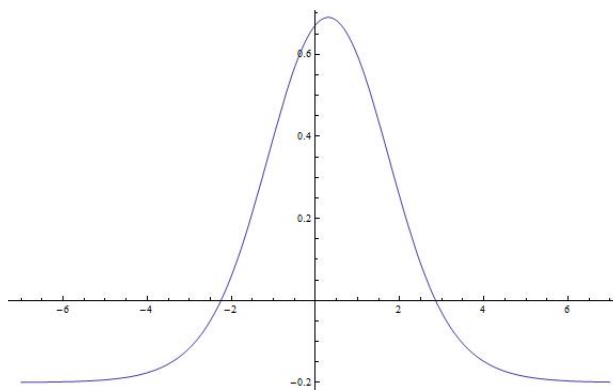


Figura 4.8: Solución de Onda Viajera

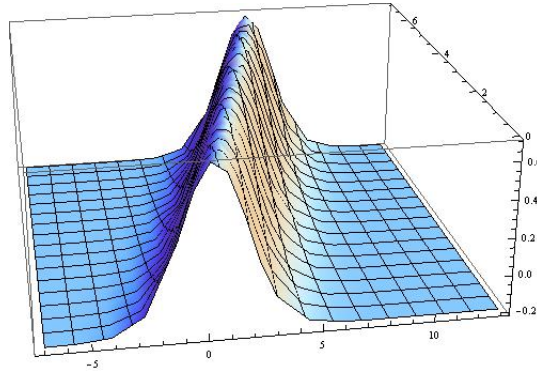


Figura 4.9: Solución Solitónica

Con tan sólo tres ejemplos que llevaron su respectiva y no tan sencilla elaboración ha sido posible detallar anlíticamente e ilustrar que un solitón puede adoptar distintas formas pero sobre todo; matemáticamente aunque su proceso parezca el mismo cada uno tiene su propia peculiaridad, en particular la forma tan visualmente ajena que pareciera poder existir entre la trayectoria y el solitón correspondiente a ella a la vista podría ser de principio imposible asociar trayectoria- solitón, pero para las matemáticas y más aún, para las ecuaciones todo es posible.

4.2. Ecuación Peyrard y Bishop

La ecuación de movimiento sobre la cual se realiza la investigación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^3 = 0 \quad (4.14)$$

La cual por razones anteriormente ya utilizadas y explicadas podemos escribir como la Ecuación Diferencial Ordinaria (4.15) al hacer el cambio de variable $z = x - vt$.

$$v^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - 3k \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha u - \beta u^3 = 0 \quad (4.15)$$

Ahora bien, por [3] tenemos que el Hamiltoniano para una ecuación de onda no lineal como la ecuación (4.14) está dado por:

$$H(u, u') = \alpha u^2 - \frac{\beta}{2} u^4 + v^2 (u')^2 - \frac{3k}{2} (u')^4$$

Las trayectorias parametrizan distintos tipos de soluciones, pero en éste trabajo es de interés particular, para ello consideremos de manera específica los siguientes valores para los parámetros:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad v = 2, \quad k = 3$$

además por [3] dichas trayectorias están contenidas en la región, pues por [3] $u^2 - 3ky$ es distinto de cero pues de no ser así $\frac{\partial H}{\partial u'}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} < u' < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

El retrato fase que corresponde a la ecuación 4.14 se muestra en la Figura[4.10]

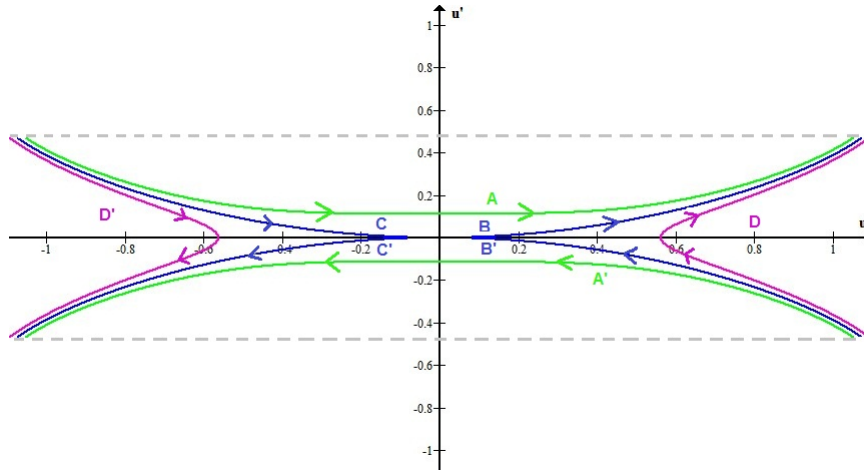


Figura 4.10: Retrato Fase

Las trayectorias tienen un peculiar comportamiento, pues A y A' forman una sola trayectoria, aunque visualmente pudiera parecer que son trayectorias ajenas no es así; es importante notar que la trayectoria A cuando es muy próxima a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ continúa su trayecto en A es decir, en $-\frac{\sqrt{2}}{3}$, lo mismo ocurre con la trayectoria D, D' y las restantes, entonces tenemos lo siguiente

$$\lim_{z \rightarrow z_0^+} A = \lim_{z \rightarrow z_0^+} B = \lim_{z \rightarrow z_0^+} D = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0^-} A' = \lim_{z \rightarrow z_0^-} C' = \lim_{z \rightarrow z_0^-} D' = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0^+} C = \lim_{z \rightarrow z_0^-} B' = 0$$

La trayectoria que interesa a éste trabajo es representada en la Figura [4.11] pues parametriza la solución de la ecuación (4.14)

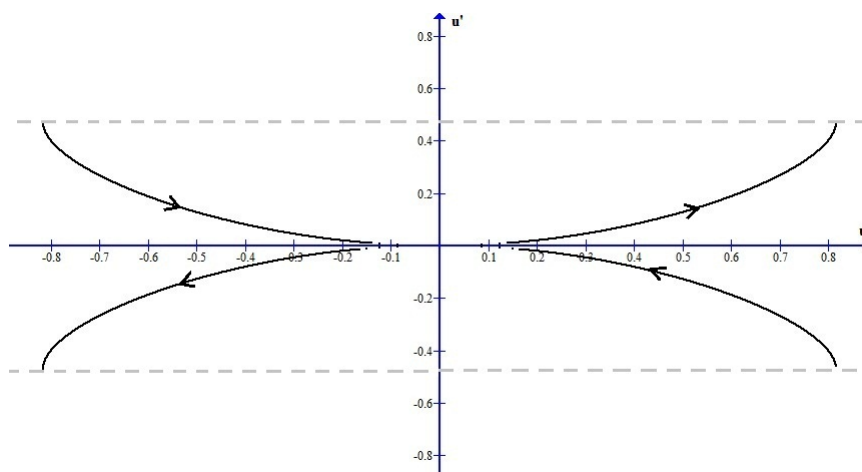


Figura 4.11: Trayectoria

Y la solución que corresponde a la ecuación (4.14) es:

$$\begin{aligned}
 u(z) = & \sqrt{2} \arctan \left(\frac{-1 + \sqrt{8z^2}}{1 - 16z^4} \right) - \arctan \left(\frac{-1 + \sqrt{8z^2}}{1 - 16z^4} \right) \\
 & - \frac{1}{4} \log \left[\left(1 + \sqrt{\frac{8z^2}{1 - \sqrt{1 - 16z^4}}} - \frac{4z^2}{1 + \sqrt{1 - 16z^4}} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{1}{4} \log \left[\left(1 + \sqrt{\frac{8z^2}{1 - \sqrt{1 + 16z^4}}} + \frac{4z^2}{1 + \sqrt{1 - 16z^4}} \right)^2 \right] \\
 & - 4 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 16z^4}}{8z^2}}
 \end{aligned}$$

ésta solución de tipo solitónico es ubicado a continuación

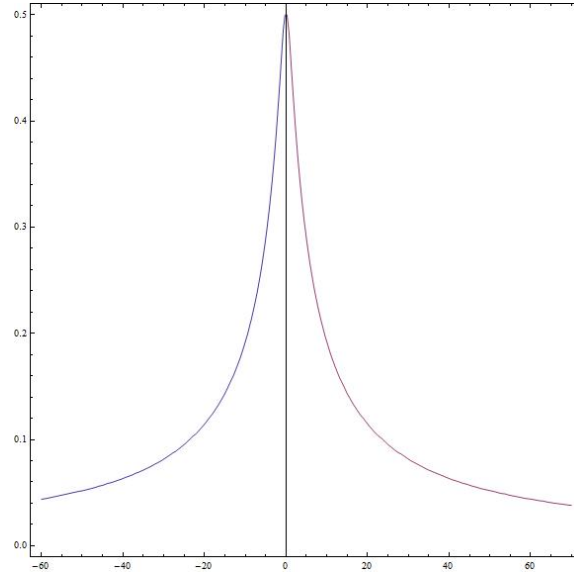


Figura 4.12: Solución de Onda Viajera

Por tanto el solitón correspondiente a la ecuación (4.14) conocida como ecuación de Peyrard Bishop es señalado en la siguiente figura

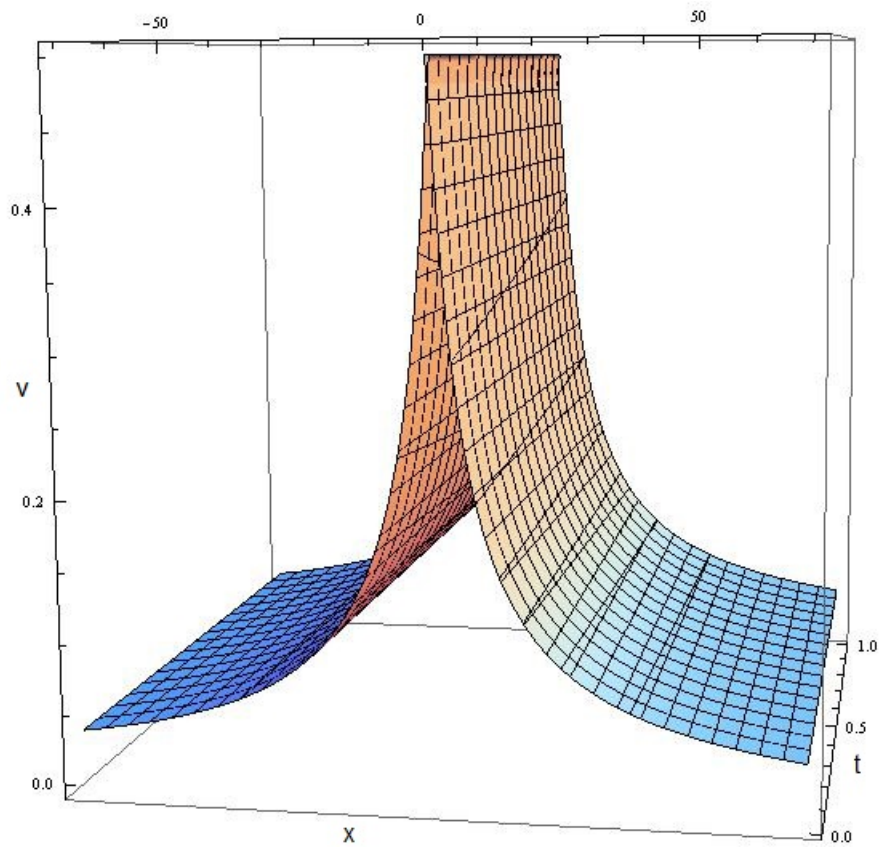


Figura 4.13: Solitón Peyrard Bishop

Actualmente en el estudio de solitones como el presentado en la Figura [4.13] es nombrado de manera particular como *PEAKON* (picon).

Bibliografía

- [1] M.A.Agüero, M.L.Najera, J.A.Aguilar and J.Sanchez. Non-Classical Traveling Solutions in al Nonlinear Klein Gordon Model. Springer, 2009.
- [2] M. Agüero, F. Ongay and J. Sanchez Mondragon. Non Classical Solitary Waves For Nonlinear Ordinary Differential Equations.
- [3] M.Agüero, F.Ongay and J. Socorro.Parameter Region for Existence of Non-classical Solitons. Springer, 2010.
- [4] Máximo A.Agüero and Mauricio J. Paulin.Solitonic Strucutures in a Nolinear model with Interparticle Anharmonic Interaction. CONACYT-MEX, 2001.
- [5] S. Ares, N. K. Voulgarakis, K. O. Rasmussen y A. R. Bishop. Bubble nucleation and cooperativity in DNA melting. *Phys. Rev. Lett.* 94:0355041-4, 2005.
- [6] D.K Arrowsmith and C.M. Place. *Dynamical Systems. Differential Equations Maps and Chaotic Behaviour.* Chapman y Hall, 1992.
- [7] Barriga Montoya Carolina ,Carrillo Calvet Humberto, Ongay Larios Fernando. El Modelo de Fitzhugh-Nagumo para el Potencial Eléctrico de una neurona.
- [8] Paul Blanchard, Robert L. Devaney, Glen R. Hall.*Ecuaciones Diferenciales.* Thomson Editores.
- [9] Fred Brauer and John A. Nohe.*The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations an Introduction.* Dover Publications, 1969.

- [10] M. Braun. *Differential Equations and their Applications*. Springer-New York. 1990.
- [11] T. Dauxois, M. Peyrard y A. R. Bishop. Entropy-driven DNA denaturation. *Phys. Rev. A* 47: R44-R47, 1993.
- [12] Juan E. Nápoles Valdés, Arturo González Thomas. Solitones, una no-linealidad no tan solitaria. enero 2006.
- [13] Lokenath Debnath. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhauser 1997.
- [14] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*. Wilery, New York NY, 1964.
- [15] John H. Hubbard, Beverly H. West. *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. Springer, 1995.
- [16] Fernando Ongay Larios and Máximo A. Agüero. Catastrophe and Hysteresis by the Emerging of Soliton-like solutions in a family of differential equation. Facultad de Ciencias.
- [17] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1991.
- [18] M. Peyrard y A.R. Bishop. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. *Phys. Rev. Lett.* 62: 2755-27458,1989.
- [19] Angel Sánchez. Matemáticas del ADN. Biofísica de moléculas individuales y mecánica estadística. marzo 2006